LE PRODUIT DELIMITE

Bréhima Dembélé (nouvpont@orangemali.net)

Pharmacie du Nouveau Pont
BP 403, Kayes, MALI

Abstract

Nous proposons le concept de produit délimité dans un espace euclidien orienté de dimension 3 afin d'englober des notions comme le produit vectoriel, le double produit vectoriel, le produit vectoriel mixte, le crochet de Poisson, le crochet de Lie, la dérivée, le tenseur de courbure espace-temps de Riemann, le tenseur de torsion de Riemann. Par un nouveau formalisme, nous énoncerons les règles de calcul auxquelles il obéit dans un tel espace. Ces règles s'appliquent identiquement à la permutation et à la perméation que nous définirons. Par quelques exemples de calcul, nous mettons en exergue sa simplicité et sa rapidité.

1 Keywords

Produit délimité, vecteurs, espace euclidien orienté de dimension 3, permutation, perméation .

2 INTRODUCTION

Nous appelons produit délimité toute suite non associative de fonctions strictement monotones ou de vecteurs non nuls et non unités ordonnée et délimitée par, au moins, un des délimiteurs courants $(\quad)$, $\{\quad\}$, $[\quad]$, etc de telle sorte que les espaces entre les termes puissent être occupés commodement par des signes séparateurs ou connecteurs $\cdot$, $\times$, $\wedge$, $\otimes$, etc, dans un espace euclidien orienté de dimension 3.

Soit **M** une variété d'un tel espace, **TM** l'espace fibré tangent de **M** contenant les champs de vecteurs f, A, BC et D (1),(2).
Soit le produit délimité suivant $f(A, BC)D$:
f et D sont des champs exterieurs (placés hors des délimiteurs) tandis que A et BC respectivement l'origine et l'extremité du délimiteur sont interieurs; BC est dit composite car composé de B et C. Retenons que $B + C$ est également composite mais structurellement different de BC.

3 METHODE ET RESULTATS

Le calcul du produit délimité obéit à une "règle de Leibniz" modifiée et circulaire comme suit (1),(2):

$$\begin{cases} \gamma_1 A(BC) = \alpha_1 B(CA) - \beta_1 C(AB) \\ \gamma_2 B(CA) = \alpha_2 C(AB) - \beta_2 A(BC) \\ \gamma_3 C(AB) = \alpha_3 A(BC) - \beta_3 B(CA) \end{cases} \qquad (1)$$

où A, B, C donnés dans cet ordre sont des champs de vecteurs de **TM**; γ_1, γ_2, γ_3, α_1, α_2, α_3 sont des nombres complexes non nuls et β_1, β_2, β_3 sont des nombres complexes quelconques. Cette dernière pourrait s'énoncer comme suit :

3.1 Règle 1

Dans l'espace fibré tangent d'une variété d'un espace euclidien orienté de dimension 3, tout champ de vecteurs exterieur non nul et non unité

permute au signe près uniquement et respectivement avec les deux voisins perturbateurs à l'interieur, sachant que la perturbation suivie de réarrangement (occupation du vide crée) précède la permutation . (3), (4) (5),(6),(7).
Par exemple:

$$A(B,C) = B(C,A) - C(A,B) \qquad (2)$$

où A, B, C sont des champs de vecteurs ordonnés de **TM** avec B et C des voisins perturbateurs à gauche de l'égalité.

Notons le symétrique interieur du champ $A(B,C)$ par:

$$\begin{cases} A[(B,C)^s] = A(C,B) = C(B,A) - B(A,C) \\ A[(B^s,C^s)] = B^s(C^s,A) - C^s(A,B^s) \\ = B(C,A)^s - C(A,B)^s \end{cases} \qquad (3)$$

Donc le symétrique interieur du champ fondamental est la résultante des symétriques des autres champs aussi bien exterieurs qu'interieurs.
Aussi, le symétrique exterieur du champ $A(B,C)$ est:

$$\begin{cases} A^s(B,C) = B(C,A^s) - C(A^s,B) \\ = B(C,A)^s - C(A,B)^s \\ = B(A,C) - C(B,A) = C(A,B) - B(C,A) \\ = B^s(C,A) - C^s(A,B) \end{cases} \qquad (4)$$

Le symétrique exterieur du champ fondamental est soit la résultante des symétriques des autres champs exterieurs ou celle des symétriques des autres champs interieurs .

A l'instar de la permutation, nous définissons également la perméation par la règle suivante

3.2 Règle 2

Tout champ de vecteurs exterieur non nul entre par perméation en recomposant ou en decomposant ceux de l'interieur;

d'où l'équation (2) peut être reécrite à l'aide de champs de vecteurs composites comme suit

$$A(B,C) = (A,BC) = (B,CA) - (C,AB) \quad (5)$$

Nous noterons bien dans un couple (A,B) que le choix de l'origine est dicté par la nature du problème tout comme dans (AC,BD); ailleurs l'origine est toujours le champ de vecteurs le moins composite comme dans le couple (A, BC) où A (non composite) et BC (composite) sont des champs de vecteurs non nuls'et non unités.
En faisant la somme S des membres de gauche et en l'égalant à la somme des membres de droite dans le système d'équations (1), nous avons

$$\begin{cases} S = (\alpha_1 - \beta_3)[B(CA)] + (\alpha_2 - \beta_1)[C(AB)] \\ + (\alpha_3 - \beta_2)[A(BC)] \end{cases} \qquad (6)$$

Pour que S soit une identité de Jacobi (8), (9) il faut et il suffit que nous ayons :

$$\gamma_1 A(BC) + \gamma_2 B(CA) + \gamma_3 C(AB) = 0 \qquad (7)$$

donc

$$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 \\ \alpha_1 - \beta_3 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_3 - \beta_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 \\ \alpha_1 = \beta_3 \\ \alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_3 = \beta_2 \end{cases} \qquad (8)$$

Dans les cas particuliers du produit vectoriel, du double produit vectoriel (10) et (11), du crochet de Lie (12), du crochet de Poisson (13), de la dérivée, des tenseurs de courbure R (14) et de torsion T de Riemann (15), nous avons

$$\begin{cases} \gamma_i = \alpha_i = \beta_i \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \qquad (9)$$

et pour le produit vectoriel mixte

$$\begin{cases} \gamma_i = \alpha_i \\ i = 1, 2, 3 \\ \beta_i = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

3.3 Règle 3

Tout champ de vecteurs interieur non nul permute directement avec le scalaire 1 de l'exterieur qui lui est contigu:

$$(A,BC) = \begin{cases} 1(A,BC) = A(1,BC) \\ (A,BC)\,1 = (A,1)\,BC \\ 1(A,BC)\,1 = A(1,1)\,BC \end{cases} \tag{11}$$

Remarquons ici que contrairement aux crochets de Poisson et ceux de Lie

$$(1,A) = -(A,1) \neq 0 \quad \forall A \neq 0 \tag{12}$$

3.4 Règle 4

Le scalaire 1 à l'interieur dissocie la composante la plus proche de tout champ de vecteurs composite interieur:

$$\begin{cases} (ABCD,1) = (ABC,D) = (ABC,1)\,D \\ = (AB,C)\,D = -(C,AB)\,D \\ = -C\,(1,AB)\,D \\ = -C\,(A,B)\,D \end{cases} \tag{13}$$

NB: Lorsque le vecteur composite est de la forme $\alpha B + \beta C$, nous aurons

$$\begin{cases} (A,\alpha B + \beta C) = A\,(1,\alpha B + \beta C) \\ = A\,[(1,\alpha B) + (1,\beta C)] \\ = A\,(1,\alpha B) + A\,(1,\beta C) \\ = A\,(\alpha,B) + A\,(\beta,C) \\ = \alpha\,(A,B) + \beta\,(A,C) \end{cases} \tag{14}$$

Ceci traduit aussi bien la bilinéarité que la permutation de tout scalaire non nul avec le champ de vecteurs non compartimental qui lui est contigu (généralisation de la **Règle 3**).

3.5 Règle 5

Tout champ de vecteurs exterieur composite binaire quelconque non nul et non unité BC se dissocie respectivement en préservant le champ interieur quelconque $(1,A)$:

$$\begin{cases} BC\,(1,A) = B\,(1,A)\,C + C\,(1,A)\,B \\ = (BC,A) = (BC,1)\,A = (B,C)\,A \\ = A\,(B,C) \\ = C\,(A,B) - B\,(C,A) \\ B \neq 1 \neq C \; et \; A \neq 1 \end{cases} \tag{15}$$

Notons bien $(BC,A) = (A,BC)$ $\forall$ $A = 1$ ou $\forall$ $BC = T$ ou $\forall$ $BC = R$, qui sont des champs interieurs symétriques.

$$\begin{cases} BC\,(1,1) = (1,1)\,BC \\ = B\,(1,1)\,C = (B,C) \end{cases} \tag{16}$$

Ainsi:

$$\begin{cases} BC\,(A,D) = BC\,(A,1)\,D = -BC\,(1,A)\,D \\ = [-B\,(1,A)\,C - C\,(1,A)\,B]\,D \\ = [(B\,(A,1)\,C + C\,(A,1)\,B]\,D \\ = B\,(A,C)\,D + C\,(A,B)\,D \\ B \neq 1 \neq C \; et \; A \neq 1 \neq D \end{cases} \tag{17}$$

Quelques exemples de calcul:

$$\begin{cases} (A,BC) = A\,(1,BC) \\ = A\,(B,C) = B\,(C,A) - C\,(A,B) \end{cases} \tag{18}$$

$$A \times (B \times C) = B\,(C \cdot A) - C\,(A \cdot B) \equiv BAC - CAB \tag{19}$$

En particulier, dans l'équation (19),

- $$\begin{cases} A = 1 \Longrightarrow 1 \times (B \times C) = B \times C \\ = B\,(C \cdot 1) - C\,(1 \cdot B) = BC - CB = [B,C] \end{cases} \tag{20}$$

- Rappelons que le produit vectoriel mixte $A \cdot (B \times C)$ est défini comme étant le déterminant dét$(ABC) = [ABC]$; donc, dans l'équation (19), remplacons A par $(A \times D)$, nous aurons:

$$\begin{cases} (A \times D) \times (B \times C) = B\,(C \cdot (A \times D)) \\ -C\,((A \times D) \cdot B) \\ = B\,[CAD] - C\,[BAD] \end{cases} \tag{21}$$

- de même dans l'équation (19)

$$A = \nabla \Longrightarrow \nabla \times (B \times C) = -B\,(C \cdot \nabla) - C\,(\nabla \cdot B) \tag{22}$$

$\nabla\times$ est l'opérateur curl ou rotationnel ayant la signature — (9), (10), (11) et (12)

D'après l'équation (10), la règle du produit mixte stipule que

$$A\cdot(C\times D) = C\cdot(D\times A) = D\cdot(A\times C) \qquad (23)$$

d'où, en remplaant A par $A\times B$, nous avons

$$\begin{cases}(A\times B)\cdot(C\times D) = C\cdot(D\times(A\times B)) = C\cdot[A(B\cdot D)-B(D\cdot A)]\\ = (C\cdot A)(B\cdot D)-(C\cdot B)(D\cdot A)\end{cases} \qquad (24)$$

Calculons les dérivées ordinaires suivantes, avec la signature - - :

$$\begin{cases} d(A\times B) = -A\times(Bd) - B\times(dA)\\ = A\times(dB) + (dA)\times B\end{cases} \qquad (25)$$

De l'équation (25), nous en déduisons la dérivée du crochet de Lie:

$$d(A\times B) = d[A,B] = [A,dB]+[dA,B] \qquad (26)$$

La dérivée du crochet de Poisson s'en déduit également

$$d\{A,B\} = \{A,dB\}+\{dA,B\} \qquad (27)$$

La dérivée du produit mixte vaut

$$\begin{cases} d[A\cdot(B\times C)] = -A\cdot[(B\times C)d] - (B\times C)\cdot[dA]\\ = A\cdot[d(B\times C)] + dA\cdot(B\times C)\\ = A\cdot(B\times dC + dB\times C) + dA\cdot(B\times C)\\ = A\cdot(B\times dC)+A\cdot(dB\times C)+dA\cdot(B\times C)\end{cases} \qquad (28)$$

donc

$$d[A,B,C] = [A,B,dC]+[A,dB,C]+[dA,B,C] \qquad (29)$$

Soit φ' un endomorphisme défini dans **TM** comme suit (14), (15):

avec u,v,w dans cet ordre des champs de vecteurs de **TM**;
si T est le tenseur de torsion de Riemann alors $\varphi = T$ et

$$\begin{cases}\varphi' = T'\\ \nabla_T(u,v)\,w = \nabla_u(v,T)\,w - \nabla_v(T,u)\,w\\ \nabla_{[u,v]} = [u,v]\\ (A,T) = (T,A) = A;\ \forall A\in(M,w)\end{cases} \qquad (31)$$

d'où

$$\nabla_T(u,v)\,w = \nabla_u vw - \nabla_v uw \qquad (32)$$

si R est le tenseur de courbure de Riemann alors $\varphi = R$ et

$$\begin{cases}\varphi' = R'\\ \nabla_R(u,v)\,w = \nabla_u(v,R)\,w - \nabla_v(R,u)\,w\\ \nabla_{[u,v]} = [u,v]\\ (B,R) = (R,B) = \nabla_B;\ \forall B\in(M,w)\end{cases} \qquad (33)$$

d'où

$$\nabla_R(u,v)\,w = \nabla_u\nabla_v w - \nabla_v\nabla_u w \qquad (34)$$

De même la signature pour ∇ est - + comme ci-après:

$$\begin{cases}\nabla(A\cdot B) = -A\cdot(B\nabla)+B\cdot(\nabla A)\\ =\mathrm{grad}(A\cdot B) = A\cdot(\nabla B)+B\cdot(\nabla A)\\ = -[(A\cdot\nabla)B+(B\cdot\nabla)A]\\ = B(A\cdot\nabla)+A(B\cdot\nabla)\end{cases} \qquad (35)$$

ceci est équivalent à

$$\begin{cases}\sum^{-}_{i=1,i=1}\nabla(A\cdot iB) = -A\times(B\times\nabla)+B\times(\nabla\times A)\\ \nabla(A\cdot B)+\nabla(B\cdot A) = A\times(\nabla\times B)+B\times(\nabla\times A)\\ \nabla(A\cdot B)+\nabla(B\cdot A) = A\times(\nabla\times B)+B\times(\nabla\times A)\\ \nabla(A\cdot B) = -\nabla(B\cdot A)+A\times(\nabla\times B)+B\times(\nabla\times A)\\ \nabla(A\cdot B) = (B\cdot\nabla)A+(A\cdot\nabla)B+A\times(\nabla\times B)+B\times(\nabla\times A)\end{cases}$$

$$
\varphi^{\nabla} : \begin{cases} \mathbf{TM} \times \mathbf{TM} \longrightarrow \mathbf{TM} \\ (u, v)\, w \longmapsto \nabla_{\varphi}(u, v)\, w - \nabla_{[u,v]} w \end{cases} \tag{30}
$$

(36)

et, un scalaire φ étant donné

$$
\begin{cases} \nabla(\varphi \mathbf{A}) = -\varphi\, (\mathbf{A}\ \nabla) + \mathbf{A}\ (\ \nabla\varphi) \\ \qquad\quad = \varphi\, (\ \nabla \mathbf{A}) + \mathbf{A}\ (\ \nabla\varphi) \end{cases} \tag{37}
$$

et $\nabla\cdot$ possède la signature ++

$$\nabla\cdot(A\times B) = A\cdot(B\times\nabla) + B\cdot(\nabla\times A)$$
$$=\mathrm{div}(A\times B) = -A\cdot(\nabla\times B) + B\cdot(\nabla\times A) \quad (38)$$

avec en particulier

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\nabla\times B) = div\,(curl\,B) \\ = -\underline{\nabla\cdot(\nabla\times B)} + B\cdot(\nabla\times\nabla) \\ = -B\cdot(\nabla\times\nabla) + B\cdot(\nabla\times\nabla) \\ = 0 \\ \forall B \end{cases} \quad (39)$$

et

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\,(\mathbf{A}\cdot\nabla) + \mathbf{A}\cdot(\nabla\varphi) \\ = \varphi\,(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla\varphi) \end{cases} \quad (40)$$

Les champs exterieurs $\nabla\times$ (opérateur curl) engendrent la signature —

$$\begin{cases} \nabla\times(\varphi\mathbf{A}) = -\varphi\,(\mathbf{A}\times\nabla) - \mathbf{A}\times(\nabla\varphi) \\ = \varphi\,(\nabla\times\mathbf{A}) + (\nabla\varphi)\times\mathbf{A} \end{cases} \quad (41)$$

et en particulier

$$\begin{cases} \nabla\times(\nabla\varphi) = -\nabla\times(\varphi\,\nabla) \\ = -\varphi\,(\nabla\times\nabla) - (\nabla\varphi)\times\nabla \\ = curl\,(grad\,\varphi) = -\varphi\,(\nabla\times\nabla) + (\varphi\,\nabla)\times\nabla \\ = -\varphi\,(\nabla\times\nabla) + \varphi\,(\nabla\times\nabla) = 0 \\ \forall\varphi \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1,i=-1} \nabla\times(A\times iB) = -A\,(B\cdot\nabla) - B\,(\nabla\cdot A) \\ \nabla\times(A\times B) + \nabla\times(B\times A) = -A\,(B\cdot\nabla) - B\,(\nabla\cdot A) \\ \nabla\times(A\times B) = -A\,(B\cdot\nabla) - B\,(\nabla\cdot A) - \nabla\times(B\times A) \\ \nabla\times(A\times B) = -A\,(B\cdot\nabla) - B\,(\nabla\cdot A) - \nabla\times(A\times B) \\ = -A\,(B\cdot\nabla) - B\,(\nabla\cdot A) + B\,(A\cdot\nabla) + A\,(\nabla\cdot B) \\ = (B\cdot\nabla)\,A - B\,(\nabla\cdot A) - (A\cdot\nabla)\,B + A\,(\nabla\cdot B) \\ = (\nabla\cdot B + B\cdot\nabla)\,A - (\nabla\cdot A + A\cdot\nabla)\,B \\ \quad BA^T - \nabla\cdot AB^T \end{cases}$$

Déterminons la bijection composée de la permutation notée P et de la perméation notée p.

$$\begin{cases} p\circ P\,[A\,(B,C)] = p\,[P\,[A\,(B,C)]] \\ = p\,[B\,(C,A) - C\,(A,B)] = (B,CA) - (C,AB) \\ P\circ p\,[A\,(B,C)] = P\,[p\,[A\,(B,C)]] \\ = P\,[(A,BC)] = (B,CA) - (C,AB) \end{cases} \quad (44)$$

Donc

$$p\circ P = P\circ p \quad (45)$$

D'où la bijection composée de la permutation et de la perméation est commutative.

4 REMERCIEMENTS

Nos remerciements les plus chaleureux vont à l'endroit de Pr Fad Seydou, mathématicien au Mali, pour son soutien sans faille à une vision pragmatique des problèmes mathématiques, de même qu'à Dr Doulaye Dembélé, ingénieur au CNRS France, pour ses contributions didactiques et pédagogiques.

5 CONCLUSION

Grace au formalisme du produit délimité, des notions d'apparence éloignées comme le calcul vectoriel, de la dérivée, des tenseurs de courbure et de torsion de Riemann, celui des crochets de Poisson et des crochets de Lie obéissent fondamentalement aux mêmes règles de calcul ainsi
énoncées. Aussi, sommes nous rendus compte que la bijection

$$\Gamma = \nabla \cdot \left(BA^T - AB^T \right) \quad \therefore \tag{43}$$

composée de la permutation et de la perméation est commutative.

6 BIBLIOGRAPHIE

[1] https: // fr.wikipedia.org/ wiki/ Règle du produit
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Product rule
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation
[4] https://en.wikipedia.org/ wiki/ Levi Civita symbol
[5] http://www.ucl.ac.uk/ ucappgu/seminars/levi-

[5] http://www.ucl.ac.uk/ ucappgu/seminars/levi-civita.pdf
[6] http://www.physics.usu.edu/Wheeler

/ClassicalMechanics/CMnotesLeviCivita.pdf
[7] http://www.ucl.ac.uk/ ucappgu/seminars/levi-civita.pdf
[8] *Mécanique,Berkeley cours de physique, Vol.1.Charles Kittel.A Colin 1972.*
[9] https://fr.wikipedia.org/ wiki/Relation de Jacobi
[10] https://walanta.files.wordpress.com/2014/07/l13b-vectordiffcaltensornotations.pdf
[11] https:// en.wikipedia.org/ wiki/ Vector calculus identities
[12] https://fr.wikipedia.org/ wiki/Crochet de Lie
[13] https://fr.wikipedia.org/ wiki/Crochet de Poisson
[14] https://fr.wikipedia.org/ wiki/Vecteur de Riemann
[15] https:// en.wikipedia.org/ wiki/ Torsion tensor